Funzione esponenziale

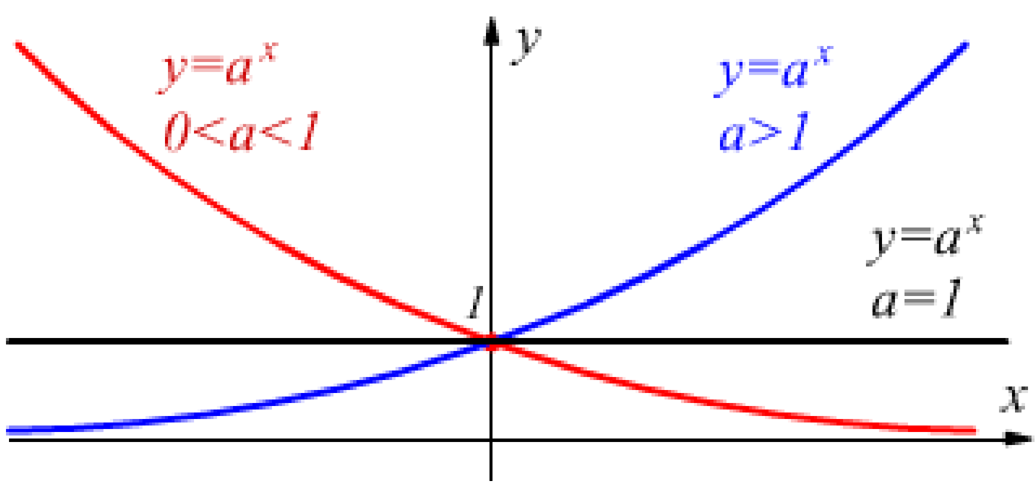
Fissato un numero reale $a > 0$ con $a \neq 1$, si chiama **funzione esponenziale** di base a, la funzione di equazione

$$y = a^x$$

il cui dominio è $\mathbb{R}$ e codominio $\mathbb{R}^+ - \{0\}$.

Se $a > 1$ la funzione esponenziale è crescente.

Se $0 < a < 1$ la funzione esponenziale è decrescente.



Proprietà

1. $1^x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2. $a^0 = 1 \quad \forall a > 0$

3. $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \quad \forall a > 0,\ n > 0$

4. $a^{\frac{m}{p}} = \sqrt[p]{a^m} \quad \forall m,\ p \in \mathbb{R},\ p \neq 0$

5. $a^x \cdot a^y = a^{(x+y)} \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}$

6. $a^x : a^y = a^{(x-y)} \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}$

7. $(a^x)^y = a^{(xy)} \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}$

8. $a^x \cdot b^x = (ab)^x \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}$

9. $a^x : b^x = (a : b)^x \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}$

Esercizi

1. $3^x - 9 = 0$

   Svolgimento: $3^x - 9 = 0 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$

2. $4^x - 16 = 0$

   Svolgimento: $4^x - 16 = 0 \Rightarrow 4^x = 4^2 \Rightarrow x = 2$

3. $3^{2-8x} = 9^{3x+1}$

   Svolgimento: $3^{2-8x} = 9^{3x+1} \Rightarrow 3^{2-8x} = 3^{2(3x+1)} \Rightarrow$

   $2 - 8x = 2(3x+1) \Rightarrow 1 - 4x = 3x + 1 \Rightarrow 7x = 0 \Rightarrow x = 0$

4. $3^x + 24 = 0$

   Svolgimento: $3^x = -24$ non è mai verificata essendo $3^x > 0$ $\forall x \in \mathbf{R}$.

5. $5^x = 0$

   Svolgimento: non è mai verificata essendo $5^x > 0$ $\forall x \in \mathbf{R}$.

6. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{27}{8}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

   Svolgimento: $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{27}{8}\sqrt{\dfrac{3}{2}} \Rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

   $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-x} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{7}{2}} \Rightarrow x = -\dfrac{7}{2}$.

7. $5^x \cdot 25^x = \dfrac{1}{5}$

   Svolgimento: $5^x \cdot 25^x = \dfrac{1}{5} \Rightarrow 5^{3x} = 5^{-1} \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{3}$.

8. $\dfrac{2^{x+2}}{3} = 3^{x+1}$

   Svolgimento: $\dfrac{2^{x+2}}{3} = 3^{x+1} \Rightarrow \dfrac{2^{x+2}}{3 \cdot 3^{x+1}} = 1 \Rightarrow$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{0} \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2.$$

9. $5^x > 25$

   Svolgimento: $5^x > 5^2$ poichè la base $a = 5 > 1$, la funzione esponenziale è crescente. Ne segue che la precedente disequazione è verificata se e solo se $x > 2$.

10. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^x < \frac{1}{9}$

    Svolgimento: $\left(3^{\frac{1}{2}-1}\right)^x < 3^{-2}$. Analogamente al caso precedente risulta $-\frac{x}{2} < -2 \Rightarrow x > 4$

11. $\left(2\sqrt{2}\right)^x < 1$

    Svolgimento: $2^{\frac{3}{2}x} < 2^0 \Rightarrow x < 0$

12. $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 0$

    Svolgimento: Essendo $a^x > 0\,\forall x \in \mathbf{R}$, la precedente disequazione non è mai verificata.

13. $\frac{1}{2^{x^2}} < \frac{1}{4}$

    Svolgimento: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2}$ Poichè la base $a = \frac{1}{2} < 1$, la funzione esponenziale è decrescente. Ne segue che la precedente disequazione è verificata se e solo se

    $$x^2 > 2 \ \mathit{ovvero}\ x < -\sqrt{2}\ \mathit{o}\ x > \sqrt{2}$$

14. $3^{\sqrt{x+1}} \leq 9$

    Svolgimento: $3^{\sqrt{x+1}} \leq 3^2 \Rightarrow \sqrt{x+1} \leq 2$ la cui soluzione è

    $$-1 \leq x \leq 3$$

Funzione logaritmica

Si chiama **logaritmo** in base **a** (positiva e diversa da 1) di un numero **b** (reale e positivo) l'esponente **x** da dare alla base a per ottenere b. Simbolicamente:

$$log_a(b) = x \iff a^x = b$$

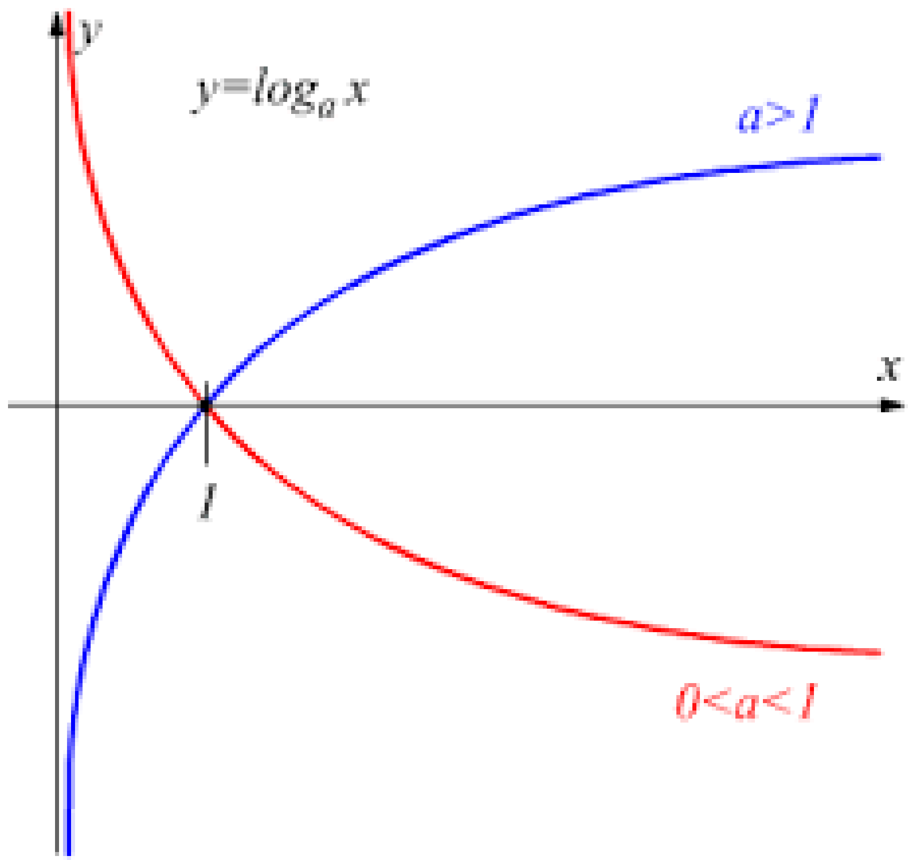
In generale la funzione logaritmo è la funzione di equazione

$$y = log_a(x)$$

il cui dominio è $\mathbb{R}^+$ e codominio $\mathbb{R}$.

Se la base $a > 1$ la funzione logaritmo è crescente.

Se la base $0 < a < 1$ la funzione logaritmo è decrescente.



Proprietà

Sia $a > 0$ con $a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, allora

1. $a^{log_a(b)} = b$
2. $log_a(a) = 1$
3. $log_a(1) = 0$
4. $log_a(b \cdot c) = log_a(b) + log_a(c)$
5. $log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a(b) - log_a(c)$
6. $log_a\left(b^n\right) = n\log_a(b)$
7. $log_a(b) = \frac{log_c(b)}{log_c(a)}$

Esercizi

1. $\log_3(81) = \log_3(3^4) = 4$

2. $\log_2(32) = \log_2(2^5) = 5$

3. $\log_3\left(\frac{1}{81}\right) = \log_3\left(3^{-4}\right) = -4$

4. $\log_2\left(\frac{1}{32}\right) = \cdots = -5$

5. $\log_{\frac{1}{2}}(64) = -6$

6. $\log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{1}{100}\right) = 2$

7. $\log_4(x) < \frac{1}{2}$

   Svolgimento:

$$\log_4(x) < \frac{1}{2}\log_4(4) \Rightarrow \log_4(x) < \log_4\left(4^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$\Rightarrow \log_4(x) < \log_4(2)$$

   Imponiamo adesso la condizione di esistenza della funzione logaritmo e ricordiamo che essendo la base $a = 4 > 1$ la funzione logaritmo è crescente.

   Pertanto la precedente disequazione è verificata se e solo se

$$\begin{cases} x > 0 \ \textit{condizione di esistenza} \\ x < 2 \ \textit{essendo } a = 4 > 1 \end{cases}$$

8. $\log_2(x^2 - 1) > 3$

   Svolgimento: $\log_2(x^2 - 1) > \log_2\left(2^3\right)$ Imponiamo adesso la condizione di esistenza della funzione logaritmo e ricordiamo che essendo la base $a = 2 > 1$ la funzione logaritmo è crescente.

Pertanto la precedente disequazione è verificata se e solo se

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \ \textit{condizione di esistenza} \\ x^2 - 1 > 8 \ \textit{essendo } a = 2 > 1 \end{cases}$$

da cui otteniamo

$$x < -3 \ \textit{o} \ x > 3.$$

9. $\log_{\frac{1}{2}}(x) < 4$

   Svolgimento: $\log_{\frac{1}{2}}(x) < \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^4$. Imponiamo adesso la condizione di esistenza della funzione logaritmo e ricordiamo che essendo la base $a = \frac{1}{2} < 1$ la funzione logaritmo è decrescente. Pertanto la precedente disequazione è verificata se e solo se

   $$\begin{cases} x > 0 \ \textit{condizione di esistenza} \\ x > \frac{1}{16} \ \textit{essendo } a = \frac{1}{2} < 1 \end{cases}$$

   da cui otteniamo

   $$x > \frac{1}{16}.$$

10. $\log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{x}{x+1}\right)$

    Svolgimento: Analogamente al caso precedente, risolviamo il sistema

    $$\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} > 0 \ \textit{condizione di esistenza} \\ \frac{x}{x+1} > 0 \ \textit{condizione di esistenza} \\ \frac{x+1}{x-1} < \frac{x}{x+1} \ \textit{essendo } a = \frac{1}{10} < 1 \end{cases}$$

    da cui

    $$x < -1.$$

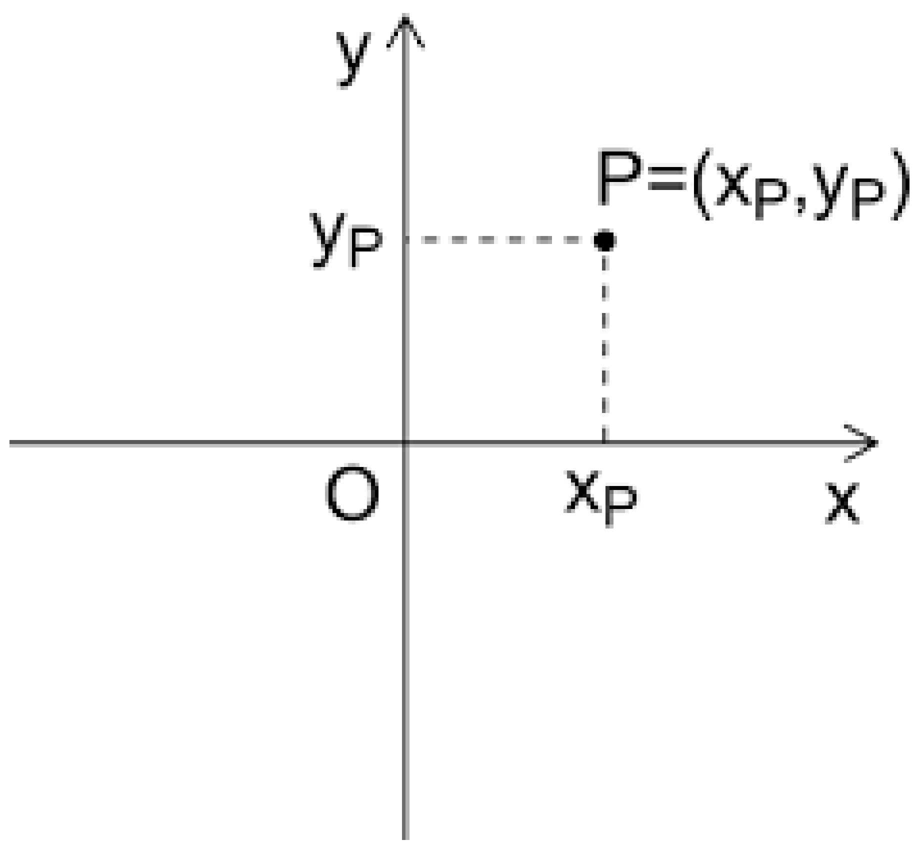
Geometria Analitica

Il Piano Cartesiano

Il **piano cartesiano** è un sistema di riferimento costituito da due assi ortogonali orientati, detti **assi cartesiani**, che si intersecano in un punto detto **origine**. Fissata un'unità di misura, è possibile indivisuare ogni punto del piano con una coppia di numeri reali, dette **coordinate**,

$$P = (x_P, y_P).$$

La prima coordinata, x_P è detta **ascissa**; la seconda, y_P, à e detta **ordinata**.



Equazione cartesiana di una retta

Una retta r nel piano è univocamente determinata da un punto $P1 = (x_1, y_1)$ e da una direzione, ovvero un vettore $\underline{v} = (l, m)$ parallelo alla retta r.

L' **equazione generale di una retta** è del tipo

$$\boxed{\mathrm{ax+by+c=0}} \text{ (}\textbf{forma implicita}\text{)}$$

Se $b \neq 0$, poniamo $k = -\dfrac{a}{b}$ $p = -\dfrac{c}{b}$, da cui l'equazione della retta si riscrive come

$$\boxed{\mathrm{y=kx+p}} \text{ (}\textbf{forma esplicita}\text{)}$$

Dati due punti distinti del piano cartesiano, $P_1 = (x_1, y_1)$ e$P_2 = (x_2, y_2)$, con $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$ è possibile determinare l'**equazione di una retta passante per due punti**:

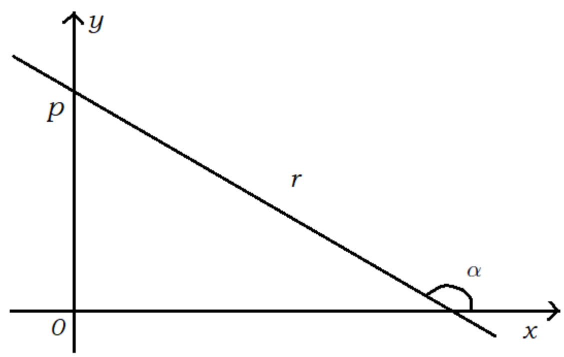
$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}}$$

Consideriamo l'equazione cartesiana della retta $ax + by + c = 0$.

$$k = -\frac{a}{b} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

è detto **coefficiente angolare** della retta r ed è uguale alla tangente trigonometrica dell'angolo α che la retta forma con il semiasse positivo delle ascisse.

p è l'ordinata del punto di intersezione delle retta r con l'asse delle ordinate.



Esercizi

1. Calcolare l'equazione della retta passante per i punti $A = (1, 4)$ e $B = (0, 5)$

   Svolgimento: l'equazione di una retta passante per due punti si esprime con

   $$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - 1}{0 - 1} = \frac{y - 4}{5 - 4}$$

   ovvero

   $$x + y - 5 = 0.$$

2. Calcolare l'equazione della retta passante per i punti $A = (2, -3)$ e $B = (-8, -3)$

   Svolgimento: poichè $y_1 = y_2 = -3$, la retta passante per i punti A e B à equazione

   $$y = -3.$$

3. Calcolare l'equazione della retta passante per i punti $A = (7, 0)$ e $B = (7, -9)$

   Svolgimento: poichè $x_1 = x_2 = 7$, la retta passante per i punti A e B à equazione

   $$x = 7.$$

Condizione di parallelismo

Due rette $r : ax+by+c=0$ e $r' = a'x+b'y+c'=0$, sono parallele quando hanno lo stesso coefficiente angolare.

$$k = k' \iff \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \iff a \cdot b' - b \cdot a' = 0..$$

Due rette parallele differiscono al più per il termine noto. Se, invece,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

le rette sono coincidenti.

Condizione di ortogonalità

Due rette r ed r' sono **ortogonali** se

$$k \cdot k' = -1 \iff k = -\frac{1}{k'} \iff -\frac{b}{a} = \frac{a'}{b'} \iff a \cdot a' + b \cdot b' = 0.$$

Rette in posizioni particolari rispetto al sistema di riferimento

Data la retta $ax + by + c = 0$

1. Passa per l'origine $O = (0, 0)$ se e solo se $c = 0$.
2. Se $a = 0$ e $b \neq 0$ allora à e una retta parallela all'asse $\vec{x}$ di equazione $y = -\frac{c}{b}$.
3. Se $b = 0$ e $a \neq 0$ allora è una retta parallela all'asse $\vec{y}$ di equazione $x = -\frac{c}{a}$.

Infine osserviamo che per stabilire la posizione reciproca di due rette r ed r', si studia il sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

In particolare, se il sistema è

- **determinato** le rette sono incidenti;
- **indeterminato** le rette sono coincidenti;
- **impossibile** le rette sono parallele;

Esercizi

1. Data la retta r di equazione $y = 2x + 6$ determinare l'equazione della retta s parallela ad r e passante per il punto $A(4; 3)$.

   Svolgimento: il coefficiente angolare della retta r è $k_r = 2$. La retta s ad essa parallela avrà dunque lo stesso coefficiente angolare $k_s = k_r = 2$, ovvero è del tipo

   $$y = 2x + p$$

   dove p si determina imponendo il passaggio per il punto $A(4; 3)$:

   $$3 = 2 \cdot 4 + p \Rightarrow p = -5$$

   da cui

   $$s : y = 2x - 5$$

2. Scrivere l'equazione della retta s passante per il punto $A(0; -2)$ e perpendicolare alla retta r di equazione $y = \frac{x}{2} + 2$.

   Svolgimento: il coefficiente angolare della retta r è $k_r = \frac{1}{2}$. La retta s ad essa perpendicolare avrà dunque coefficiente angolare $k_s = -\frac{1}{k_r} = -2$, ovvero è del tipo

   $$y = -2x + p$$

   dove p si determina imponendo il passaggio per il punto $A(0; -2)$:

   $$-2 = 0 + p \Rightarrow p = -2$$

   da cui

   $$s : y = -2x - 2.$$

3. Data la retta r di equazione $3x + 2y - 1 = 0$, trovare l'equazione della retta s perpendicolare ad r e passante per il punto $A(1; -1)$.

   Svolgimento: il coefficiente angolare della retta r è $k_r = -\dfrac{a}{b} = -\dfrac{3}{2}$. La retta s ad essa perpendicolare avrà dunque coefficiente angolare $k_s = -\dfrac{1}{k_r} = \dfrac{2}{3}$, ovvero è del tipo

$$y = \frac{2}{3}x + p$$

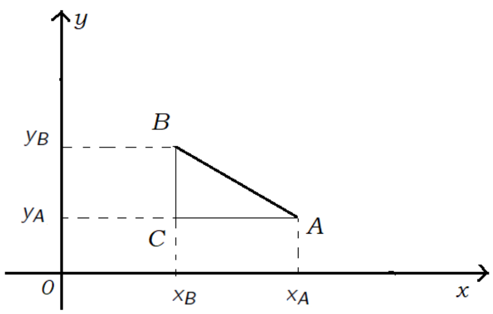
   dove p si determina imponendo il passaggio per il punto $A(1; -1)$:

$$-1 = \frac{2}{3} + p \Rightarrow p = -\frac{5}{3}$$

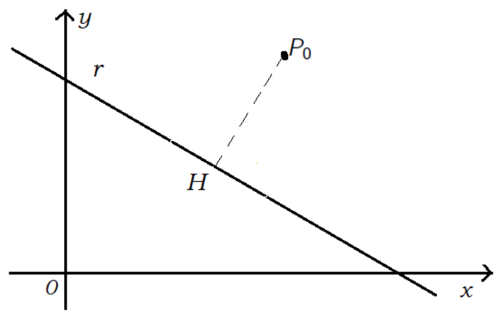
   da cui

$$s : 2x - 3y - 5 = 0.$$

Distanza tra enti geometrici



Distanza tra due punti



Distanza punto - retta

Distanza tra punti

Siano $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ punti, allora

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Distanza punto-retta

Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ ed $r : ax + by + c = 0$, la minima distanza di P_0 da r è $\overline{PH}$ con H piede del segmento ortogonale ad r passante per P_0,

$$d(P_0, r) = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|.$$

Esercizi

- Calcolare la distanza tra i punti $A = (1, 4)$ e $B = (-2, 0)$

  Svolgimento:

  $$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (0 - 4)^2} = 5.$$

- Calcolare la distanza tra i punti $A = (6, -1)$ e $B = (8, -2)$

  Svolgimento:

  $$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(8 - 6)^2 + (-2 + 1)^2} = \sqrt{5}.$$

- Calcolare la distanza del punto $P_0 = (1, 2)$ dalla retta r: 3x-4y+1=0

  Svolgimento:

  $$d(P_0, r) = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 1}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}\right| = \frac{4}{5}.$$

- Calcolare la distanza del punto $A = (3, -1)$ dalla retta r: y = -2x+1

  Svolgimento:

  $$d(P_0, r) = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) - 1}{\sqrt{2^2 + (1)^2}}\right| = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$