Corso zero di Matematica

Docente: Liliana Luca
Indirizzo e-mail: liliana.luca@unikore.it

Lezione n.1

Risoluzione di un'equazione di secondo grado

Un'equazione è di secondo grado se, scritta in forma normale, è del tipo

$$(1) \qquad ax^2+bx+c=0 \qquad \text{con } a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$$

Se i coefficienti b, c sono diversi da zero l'equazione (1) si dice completa, altrimenti incompleta.

Risoluzione di un'equazione di secondo grado incompleta

$\boxed{\text{CASO 1}}$ Equazione monomia $(b=c=0)$. La (1) diventa:

$$\underset{\neq 0}{a}x^2=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$$

$\boxed{\text{CASO 2}}$ Equazione spuria $(b\neq 0,\ c=0)$. La (1) diventa

$$ax^2+bx=0 \Rightarrow x(ax+b)=0 \Rightarrow x=0 \vee ax+b=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=0,\ x_2=-\frac{b}{2a}$$

$\boxed{\text{CASO 3}}$ Equazione pura $(b=0,\ c\neq 0)$. La (1) diventa

$$ax^2+c=0 \Rightarrow x^2=\boxed{-\frac{c}{a}}$$

se $-\frac{c}{a}>0$ l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

se $-\frac{c}{a}<0$ l'equazione non ammette soluzioni reali.

Risoluzione di un'equazione di secondo grado completa

FORMULA RISOLUTIVA: $ax^2+bx+c=0$ (con $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$)

Calcoliamo il discriminante $\Delta=b^2-4ac$

- Se $\Delta>0$ l'equazione (1) ammette due soluzioni reali e distinte

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Se $\Delta=0$ l'equazione (1) ammette due soluzioni reali e coincidenti

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$

- Se $\Delta<0$ l'equazione (1) NON ha soluzioni reali.

Esempi

① $4x^2-7x+3=0$

$$\Delta = (-7)^2-4\cdot(4)(3) = 49-48 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{7\pm\sqrt{1}}{8} \quad \begin{array}{l} \nearrow x_1 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \\ \searrow x_2 = 1 \end{array}$$

Soluzioni: $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = 1$

② $5(x^2+1) = x(x-1)$

$5x^2+5 = x^2-x \Rightarrow 5x^2+5-x^2+x=0 \Rightarrow 4x^2+x+5=0$

Risolviamo $4x^2+x+5=0$

$$\Delta = (1)^2-4(4)\cdot 5 = 1-80 = -79<0$$

L'equazione NON ammette soluzioni reali

③ $(1+x)^2+(10x)^2=0$

Possiamo subito dire che l'equazione non ammette soluzioni reali. Al primo membro infatti vi è la somma di due quantità ≥ 0 che non si annullano in corrispondenza dello stesso valore

$$\underbrace{\boxed{(1+x)^2}}_{\geq 0} + \underbrace{\boxed{(10x)^2}}_{\geq 0} = 0$$

Pertanto la quantità $(1+x)^2+(10x)^2$ è positiva $\forall x \in \mathbb{R}$

$(1+x)^2=0 \Leftrightarrow x=-1$ $\qquad$ $(10x)^2=0 \Leftrightarrow x=0$

Verifichiamolo applicando la formula risolutiva

$(1+x)^2+(10x)^2=0 \Rightarrow 1+x^2+2x+100x^2=0 \Rightarrow 101x^2+2x+1=0$

$\Delta = (2)^2-4(101)<0$

L'equazione non ha soluzioni reali.

Esercizi proposti

$4x^2-16=0$

$4x(x+1)=3$

$-5x^2+12x-17=0$

$3x^2-2x-8=0$

$\frac{x}{3}(2+x)=0$

$x^2+16=0$

$-6x^2+x+1=0$

Risoluzione di una disequazione di secondo grado

Ogni disequazione di secondo grado intera nell'incognita x può essere ricondotta alla forma $ax^2+bx+c>0$ (o in quelle analoghe con $<, \leq, \geq$) con $a \neq 0$.

Prima di illustrare il metodo che ci permette di risolvere una disequazione di secondo grado facciamo alcune osservazioni:

Oss. 1: $y = ax^2+bx+c$ è l'equazione di una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse $\vec{y}$

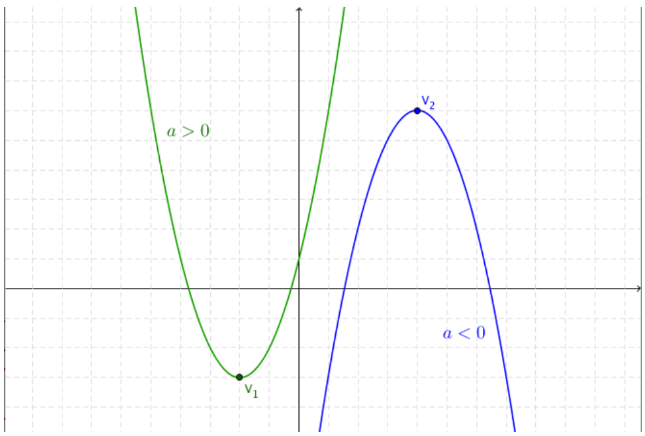
Oss. 2: Determinare l'intersezione di una parabola di eq. $y = ax^2+bx+c$ con l'asse delle $\vec{x}$ equivale a risolvere l'equazione $ax^2+bx+c=0$

$$\begin{cases} y=0 \\ y = ax^2+bx+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ ax^2+bx+c=0 \end{cases}$$

Oss. 3 Il coefficiente a $(a \neq 0)$ determina la concavità della parabola

$a>0$ concavità verso l'alto

$a<0$ concavità verso il basso



Alla luce delle precedenti osservazioni possiamo dedurre che:

Data l'equazione $ax^2+bx+c=0$

1 Se $\Delta>0$ la parabola interseca l'asse $\vec{x}$ in due punti distinti $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$ con x_1, x_2 soluzioni distinte dell'equazione $ax^2+bx+c=0$

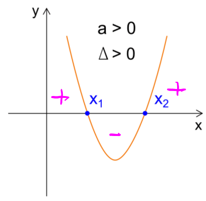
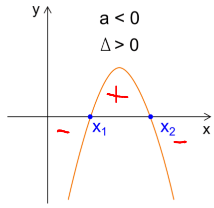
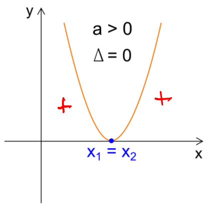
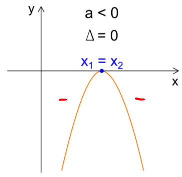
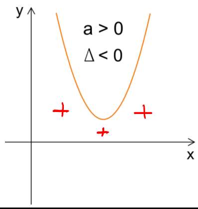
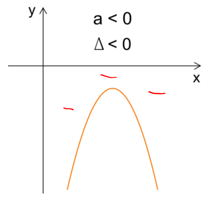
2 Se $\Delta=0$ la parabola interseca l'asse $\vec{x}$ in un punto $(x_1, 0)$

3 Se $\Delta<0$ la parabola NON interseca l'asse $\vec{x}$.

SCHEMA RISOLUTIVO DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

1° STEP: Risolviamo l'equazione associata $ax^2+bx+c=0$

2° STEP: Studiamo il segno del trinomio ax^2+bx+c distinguendo i vari casi che riassumiamo nella seguente tabella:

	$y=ax^2+bx+c \quad a>0$		$y=ax^2+bx+c \quad a<0$	
$\Delta>0$		$ax^2+bx+c>0 \Rightarrow x<x_1 \vee x>x_2$ $ax^2+bx+c\geq 0 \Rightarrow x\leq x_1 \vee x\geq x_2$ $ax^2+bx+c<0 \Rightarrow x_1<x<x_2$ $ax^2+bx+c\leq 0 \Rightarrow x_1\leq x\leq x_2$		$ax^2+bx+c>0 \Rightarrow x_1<x<x_2$ $ax^2+bx+c\geq 0 \Rightarrow x_1\leq x\leq x_2$ $ax^2+bx+c<0 \Rightarrow x<x_1 \vee x>x_2$ $ax^2+bx+c\leq 0 \Rightarrow x\leq x_1 \vee x\geq x_2$
$\Delta=0$		$ax^2+bx+c>0 \Rightarrow x\neq x_1$ $ax^2+bx+c\geq 0 \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$ $ax^2+bx+c<0 \Rightarrow \nexists x\in\mathbb{R}$ $ax^2+bx+c\leq 0 \Rightarrow x=x_1$		$ax^2+bx+c>0 \Rightarrow \nexists x\in\mathbb{R}$ $ax^2+bx+c\geq 0 \Rightarrow x=x_1$ $ax^2+bx+c<0 \Rightarrow x\neq x_1$ $ax^2+bx+c\leq 0 \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$
$\Delta<0$		$ax^2+bx+c>0 \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$ $ax^2+bx+c\geq 0 \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$ $ax^2+bx+c<0 \Rightarrow \nexists x\in\mathbb{R}$ $ax^2+bx+c\leq 0 \Rightarrow \nexists x\in\mathbb{R}$		$ax^2+bx+c>0 \Rightarrow \nexists x\in\mathbb{R}$ $ax^2+bx+c\geq 0 \Rightarrow \nexists x\in\mathbb{R}$ $ax^2+bx+c<0 \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$ $ax^2+bx+c\leq 0 \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$

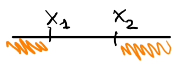
IN SINTESI

Osserviamo che possiamo confrontare il segno del coefficiente a con il segno della disequazione

SEGNO di a	SEGNO della disequazione	
+	$>$ $\geq$	CONCORDI
−	$<$ $\leq$	CONCORDI
−	$>$ $\geq$	DISCORDI
+	$<$ $\leq$	DISCORDI

RISOLUZIONE DI $ax^2+bx+c>0$ oppure $ax^2+bx+c<0$

Se $\Delta>0$ $ax^2+bx+c=0$ ha due soluzioni reali e distinte x_1, x_2 $(x_1<x_2)$

CONCORDI $\rightarrow$ soluzioni esterne $x<x_1 \vee x>x_2$ 

DISCORDI $\rightarrow$ soluzioni interne $x_1<x<x_2$ 

Se $\Delta<0$ $ax^2+bx+c=0$ non ha soluzioni reali

CONCORDI $\rightarrow$ $\forall x\in\mathbb{R}$

DISCORDI $\rightarrow$ $\nexists x\in\mathbb{R}$

Se $\Delta=0$ $ax^2+bx+c=0$ ammette due soluzioni reali e coincidenti $x_1=x_2$

CONCORDI $\rightarrow$ $x\neq x_1$ DISCORDI $\rightarrow$ $\nexists x\in\mathbb{R}$

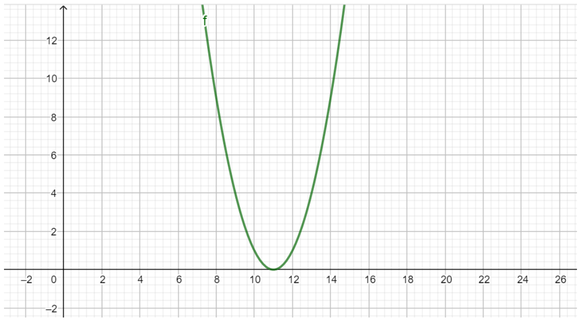
Esempi

① $x(x-22)+121 \leq 0 \Rightarrow x^2-22x+121 \leq 0$

Risolviamo l' equazione associata $x^2-22x+121=0$

$\Delta = (-22)^2 - 4 \cdot 121 = 0$

$x_{1,2} = \frac{22}{2} = 11$



La soluzione della disequazione è $x=11$

② $-x^2+8x \geq 0$

Risolviamo l' equazione associata $-x^2+8x=0 \Rightarrow x(-x+8)=0$

$x=0$

$-x+8=0 \Rightarrow x=8$

soluzioni equazione associata $x_1=0$, $x_2=8$

DISCORDI ($a=-1$, segno della disequazione $\geq$) $\Rightarrow$ SOL. INTERNE

0 8

Insieme delle soluz. $S = \{ x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 8 \}$

③ $20x-4x^2-25<0 \Rightarrow -4x^2+20x-25<0$

Eq. associata $-4x^2+20x-25=0$

$\Delta = (20)^2 - 4 \cdot (-4)(-25) = 0 \qquad x_1 = \frac{-20}{-8} = \frac{5}{2}$

CONCORDI $\Rightarrow$ Il trinomio $-4x^2+20x-25$ è negativo $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{2}\}$

L' insieme delle soluzioni della disequazione è :

$$S = \{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{5}{2} \}$$

④ $20x-4x^2-25 \leq 0$

Eq. associata $-4x^2+20x-25=0$ ammette due soluzioni reali e coincidenti

$x_2 = x_1 = \frac{5}{2}$ (vedi es. precedente)

Soluzione della disequazione : $\forall x \in \mathbb{R}$

⑤ $x^2+16 \geq 0$

Eq. associata $x^2+16=0 \Rightarrow x^2=-16 \quad \nexists x \in \mathbb{R}$

CONCORDI $\Rightarrow$ Soluz. della diseq. $\forall x \in \mathbb{R}$ (Del resto x^2+16 è la somma di due quantità $\geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$)

Esercizi proposti

$3x^2-12>0$

$x^2+3x-18\geq 0$

$x^2-2x+1\leq 0$

$x^2+7x-9>0$

Risoluzione di un'equazione razionale fratta

Le equazioni numeriche fratte sono equazioni in cui l'incognita compare nel denominatore di almeno una frazione.

Nella risoluzione bisogna tener conto delle condizioni di esistenza delle frazioni con l'incognita a denominatore.

Esempi

1. $$\frac{x}{x-1}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{x-1}$$

Scriviamo la condizione di esistenza (C.E)

C.E. $x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$

$2x\neq 0 \Rightarrow x\neq 0$

Riduciamo allo stesso denominatore

$mcm\,(x-1,2x)=2x(x-1)$

$$\frac{2x^2+x-1}{2x(x-1)}=\frac{2x}{2x(x-1)}$$

$$2x^2+x-1=2x$$

Risolviamo l'equazione $2x^2+x-1=2x$

$$2x^2+x-1=2x \Rightarrow 2x^2+x-1-2x=0 \Rightarrow 2x^2-x-1=0$$

$$\Delta=(-1)^2-4\cdot(2)(-1)=1+8=9$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{4} \quad x_1=-\frac{1}{2} \quad x_2=1$$

$x_1 = -\frac{1}{2}$ SOLUZIONE ACCETTABILE perché soddisfa la c.e. $(x \neq 0, x \neq 1)$

$x_2 = 1$ NON ACCETTABILE perché NON soddisfa la c.e

L'unica soluzione dell'equazione é $x_1 = -\frac{1}{2}$

Lezione n.2

② $\frac{2x}{x+3} = -\frac{x}{x+1}$

C.E. $\begin{cases} x+3 \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -3 \\ x \neq -1 \end{cases}$

$\frac{2x}{x+3} + \frac{x}{x+1} = 0 \Rightarrow \frac{2x(x+1)+x(x+3)}{(x+3)(x+1)} = 0 \Rightarrow 2x(x+1)+x(x+3)=0 \Rightarrow 2x^2+2x+x^2+3x=0$

mcm$(x+3, x+1) = (x+3)(x+1)$

Abbiamo posto $x \neq -3$ e $x \neq -1$

$\Rightarrow 3x^2+5x=0 \Rightarrow x(3x+5)=0$

$x_1 = 0$

$3x+5=0 \Rightarrow x_2 = -\frac{5}{3}$

entrambe le soluzioni sono accettabili perché soddisfano la condizione di esistenza.

③ $\frac{x+2}{x+1} + \frac{2}{x^2-2x-3} = 0$

C.E.: $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$x^2-2x-3 \neq 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 4+12 = 16$

$x_{1,2} \neq \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$ $\quad x_1 \neq -1$, $\quad x_2 \neq 3$

$\Rightarrow \boxed{x \neq -1, \quad x \neq 3}$

Calcoliamo il mcm$(x+1, x^2-2x-3)$

Dobbiamo scomporre in fattori irriducibili il polinomio x^2-2x-3. Poiché il discriminante Δ dell'equazione $x^2-2x-3=0$ é maggiore di zero il polinomio x^2-2x-3 é scomponibile.

Possiamo sfruttare la seguente formula:

$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

dove: x_1 ed x_2 sono le soluzioni dell'equazione $ax^2+bx+c=0$

$$x^2-2x+3=(x+1)(x-3)$$

$$\frac{x+2}{x+1}+\frac{2}{(x+1)(x-3)}=0 \underset{\substack{\uparrow\\ x\neq -1\\ x\neq 3}}{\Longrightarrow} (x+2)(x-3)+2=0 \Rightarrow x^2-3x+2x-6+2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-x-4=0$$

$$\Delta=(-1)^2-4(-4)=17$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2} \quad \begin{cases} x_1=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2} \\[2ex] x_2=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\end{cases}$$

entrambe le soluzioni sono accettabili perché soddisfano la condizione di esistenza.

④ $\frac{4}{x}+x=4$

C.E : $x\neq 0$

$$\frac{4}{x}+x-4=0 \Rightarrow \frac{4+x^2-4x}{x}=0 \underset{\substack{\uparrow\\ x\neq 0}}{\Longrightarrow} 4+x^2-4x=0 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow (x-2)^2=0$$

$\Rightarrow \boxed{x=2}$ Sol. accettabile

Esercizi proposti

- $\frac{x-x^2}{x-1}=0$
- $\frac{x-3}{2x+3}=\frac{1}{x-1}$
- $\frac{x^2+1}{3+x}-2\left(\frac{1-3x}{6+2x}\right)+\frac{x-1}{2}=0$
- $\frac{3}{x}+\frac{4+x}{x^2-9}=0$

Risoluzione di una disequazione razionale fratta

Una disequazione è fratta se contiene l'incognita in almeno un denominatore. Per risolverla dobbiamo trasformarla in un'equazione del tipo:

$$\frac{A(x)}{B(x)}>0 \quad \left(\text{oppure } \frac{A(x)}{B(x)}\geq 0,\ \frac{A(x)}{B(x)}<0,\ \frac{A(x)}{B(x)}\leq 0\right)$$

Risoluzione

① Studiamo il segno del numeratore e del denominatore:

$A(x)>0$ (≥ 0 nel caso in cui la disequazione è del tipo $\frac{A(x)}{B(x)}\geq 0$ oppure $\frac{A(x)}{B(x)}\leq 0$)

$B(x)>0$

Stiamo implicitamente imponendo la condizione di esistenza della frazione ($B(x)\neq 0$)

② Individuiamo il segno complessivo di $\frac{A(x)}{B(x)}$ mediante un'opportuna rappresentazione grafica

Esempio:

$$\frac{x^2-1}{2x^2-7x-4} \geq 0$$

N. $x^2-1 \geq 0$ Eq. associata $x^2-1=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x \leq -1 \quad \vee \quad x \geq 1}$$

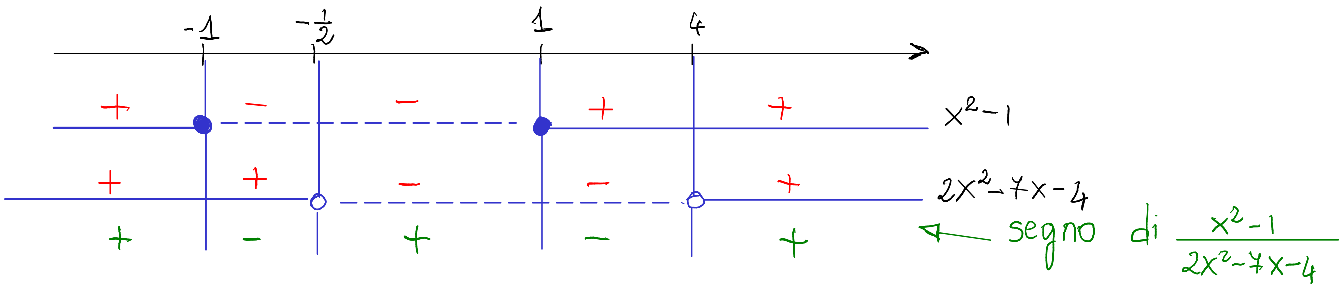
D. $2x^2-7x-4>0$ Eq. associata $2x^2-7x-4=0$

$$\Delta = (-7)^2-4\cdot(2)(-4) = 49+32 = 81$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 9}{4} \quad x_1 = -\frac{1}{2} \quad x_2 = 4$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x < -\frac{1}{2} \quad \vee \quad x > 4}$$



Soluzione: $\boxed{x \leq -1 \quad \vee \quad -\frac{1}{2} < x \leq 1 \quad \vee \quad x > 4}$

Esercizi proposti

- $\frac{x-3}{x+5} < 0$
- $\frac{x^2+5x}{x^2+16} > 0$
- $\frac{5x-1}{x-3} \geq 1$

Equazioni con valore assoluto

Sia $x \in \mathbb{R}$. Il valore assoluto di x che indicheremo con $|x|$ è per definizione

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Il valore assoluto di un numero è per definizione sempre positivo o nullo.
Più in generale se consideriamo il valore assoluto di una quantità $A(x)$ esso è per definizione

$$|A(x)| = \begin{cases} A(x) & \text{se } A(x) \geq 0 \\ -A(x) & \text{se } A(x) < 0 \end{cases}$$

Per esempio:

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{se } x-4 \geq 0 \\ -x+4 & \text{se } x-4 < 0 \end{cases}$$

Equazioni del tipo $|A(x)| = a$ con $a \in \mathbb{R}$

se $a \geq 0$ l'equazione è equivalente ad $A(x) = a \vee A(x) = -a$
se $a < 0$ l'equazione non ha soluzioni.

Equazioni del tipo $|A(x)| = B(x)$

$|x-5| = 3x-1$ Per definizione $|x-5| = \begin{cases} x-5 & \text{se } x \geq 5 \\ -x+5 & \text{se } x < 5 \end{cases}$

		5	
$x-5$	$-$	0	$+$
$\lvert x-5 \rvert$	$-x+5$		$x-5$

METODO ①

Le soluzioni si ottengono dall'unione dell'insieme delle soluzioni dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ x-5 = 3x-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 5 \\ -x+5 = 3x-1 \end{cases}$$

SISTEMA ①

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ x-5 = 3x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

Soluzione NON accettabile

SISTEMA ②

$$\begin{cases} x < 5 \\ -x+5 = 3x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Sol. accettabile

METODO ②

$$|x-5| = \underbrace{3x-1}_{\geq 0}$$

$$\begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ x-5 = \pm(3x-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x-5 = 3x-1 \quad \vee \quad x-5 = -3x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x = -2 \quad \vee \quad x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Sol. NON accettabile

Soluzione accettabile

Disequazioni con valore assoluto

Disequazioni del tipo $|A(x)| > k$ con $k > 0$

Per definizione

$$|A(x)| = \begin{cases} A(x) & \text{se } A(x) \geq 0 \\ -A(x) & \text{se } A(x) < 0 \end{cases}$$

Risolvere una disequazione del tipo $|A(x)| > k$ $(\geq)$ con $k > 0$ equivale a risolvere

$$(I)\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) > k \end{cases} \quad \cup \quad (II)\begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) > k \end{cases}$$

Soluzione sistema (I) $A(x) > k$

Soluzione sistema (II) $A(x) < -k$

Pertanto $|A(x)| > k$ è equivalente a $A(x) < -k \ \vee \ A(x) > k$

$|A(x)| \geq k$ è equivalente a $A(x) \leq -k \ \vee \ A(x) \geq k$

Esempi

$|6-x| > 3 \iff \overset{①}{6-x < -3} \ \vee \ \overset{②}{6-x > 3}$

① $6-x < -3 \Rightarrow -x < -9 \Rightarrow x > 9$

② $6-x > 3 \Rightarrow -x > -3 \Rightarrow x < 3$

Sol. $\boxed{x < 3 \ \vee \ x > 9}$

Disequazioni del tipo $|A(x)| < k$ $(\leq)$ con $k > 0$

Risolvere una disequazione del tipo $|A(x)| < k$ con $k > 0$ equivale a risolvere

$$(I)\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) < k \end{cases} \quad \vee \quad (II)\begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) < k \end{cases}$$

Soluzione sistema (I): $0 \leq A(x) < k$

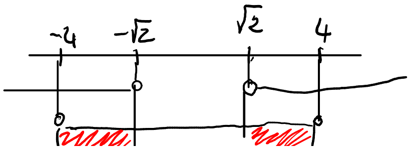
Soluzione sistema (II): $-k < A(x) < 0$

Pertanto $|A(x)| < k$ con $k > 0$ è equivalente a $-k < A(x) < k$ cioè $\begin{cases} A(x) > -k \\ A(x) < k \end{cases}$

$|A(x)| \leq k$ con $k > 0$ è equivalente a $-k \leq A(x) \leq k$

Esempio $|x^2-9| < 7 \iff -7 < x^2 - 9 < 7$

$$\begin{cases} x^2 - 9 > -7 \\ x^2 - 9 < 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 > 2 \\ x^2 < 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{2} \ \vee \ x > +\sqrt{2} \\ -4 < x < 4 \end{cases}$$



Sol: $-4 < x < -\sqrt{2} \quad \vee \quad \sqrt{2} < x < 4$

Oss: Se $K<0$ $\quad \underbrace{|A(x)|}_{\geq 0} < \underbrace{K}_{<0}$ non ammette soluzioni

$\underbrace{|A(x)|}_{\geq 0} > \underbrace{K}_{<0}$ la disequazione è sempre verificata purché sia soddisfatta la C.E. di $A(x)$

Esempi

$\left|\frac{x}{x-1}\right| > -1 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$|x^2-3x| > -2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$|x^2-2x| < -2 \qquad$ impossibile

Disequazioni con valore assoluto del tipo $|A(x)| \underset{(\leq)}{<} B(x)$ oppure $|A(x)| \underset{(\geq)}{>} B(x)$

Consideriamo la disequazione $|A(x)| < B(x)$

Per definizione

$$|A(x)| = \begin{cases} A(x) & \text{se } A(x) \geq 0 \\ -A(x) & \text{se } A(x) < 0 \end{cases}$$

Per risolvere la disequazione $|A(x)| < B(x)$ bisogna risolvere i due sistemi

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) < B(x) \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) < B(x) \end{cases}$$

In modo analogo

$|A(x)| > B(x)$ equivale a $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) > B(x) \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) > B(x) \end{cases}$

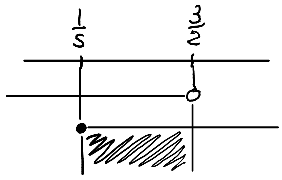
Esempio

$|5x-1| < 3x+2$

$$|5x-1| = \begin{cases} 5x-1 & \text{se } 5x-1 \geq 0 \\ -5x+1 & \text{se } 5x-1 < 0 \end{cases}$$

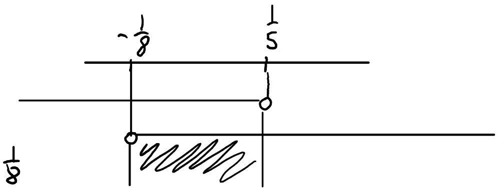
$$|5x-1| < 3x+2 \iff \begin{cases} 5x-1 \geq 0 \\ 5x-1 < 3x+2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 5x-1 < 0 \\ -5x+1 < 3x+2 \end{cases}$$

(I) $\begin{cases} 5x-1 \geq 0 \\ 5x-1 < 3x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{5} \\ 2x < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{5} \\ x < \frac{3}{2} \end{cases}$



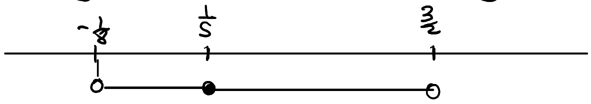
$\frac{1}{5} \leq x < \frac{3}{2}$

(II) $\begin{cases} 5x-1 < 0 \\ -5x+1 < 3x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{5} \\ -8x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{5} \\ x > -\frac{1}{8} \end{cases}$



$-\frac{1}{8} < x < \frac{1}{5}$

S_{TOT} : $\frac{1}{5} \leq x < \frac{3}{2} \quad \vee \quad -\frac{1}{8} < x < \frac{1}{5}$



$$\boxed{-\frac{1}{8} < x < \frac{3}{2}}$$

Esercizi proposti

① $\left|\frac{x+3}{x-2}\right| < 4$

② $|4x^2-1| - 15 \leq 0$

③ $|x^2-x| < 12$

④ $|3x-4| \geq 2x+5$

Equazioni irrazionali

Un'equazione si dice irrazionale se l'incognita compare all'interno di una radice (quadrata, cubica ecc..)

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x) \qquad n \in \mathbb{N} \qquad n \geq 2$$

① n dispari

$\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$ è equivalente a risolvere questa equazione $A(x) = [B(x)]^n$

esempio $\sqrt[3]{x-3} = 2 \iff x-3 = 8 \Rightarrow x = 11$

② n pari

$\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$

Imponiamo la condizione di esistenza $A(x) \geq 0$ e $B(x) \geq 0$

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^n \end{cases}$$

Esempio $\sqrt{x+2} = x$

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x+2 = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq 0 \\ x^2-x-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \cancel{x_1=-1} \vee x_2 = 2 \end{cases}$$

NON ACC.

Sol: $x=2$

$x^2-x-2=0$

$\Delta = 1+8=9$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=2 \end{cases}$$

Disequazioni irrazionali

$\sqrt[n]{A(x)} < B(x)$ $(\leq)$ $\qquad \sqrt[n]{A(x)} > B(x)$ $(\geq)$ $\qquad n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2$

n dispari

$\sqrt[n]{A(x)} < B(x) \iff A(x) < [B(x)]^n$

$\sqrt[n]{A(x)} > B(x) \iff A(x) > [B(x)]^n$

n pari consideriamo il caso $\boxed{n=2}$

1° CASO $\sqrt{A(x)} < B(x)$ è equivalente a risolvere il sistema

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^2 \end{cases}$$

2° CASO $\sqrt{A(x)} > B(x)$ è equivalente a:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases} \vee \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$$

Esempi

① $\sqrt{2x+8} < x$

$$\begin{cases} 2x+8 \geq 0 \\ x > 0 \\ 2x+8 < x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x > 0 \\ x^2-2x-8 > 0 \end{cases} \overset{(*)}{\Longrightarrow}$$

Risolviamo $x^2-2x-8>0$

$$x^2-2x-8=0$$

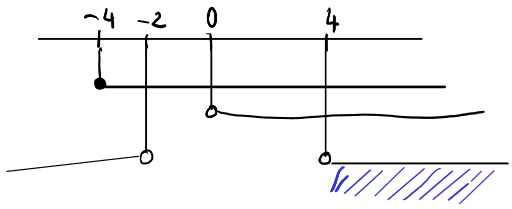
$$\Delta = 4+32 = 36$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{2} \quad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Sol: $x<-2 \vee x>4$

Quindi

$(*) \Longrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x>0 \\ x<-2 \vee x>4 \end{cases}$



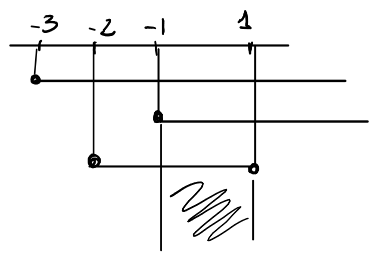
Soluz: $x>4$

$\longleftrightarrow$

② $\sqrt{x+3} \geq x+1$

$(I) \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x+3 \geq (x+1)^2 \end{cases} \quad \vee \quad (II) \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x+1<0 \end{cases}$

$(I) \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq -1 \\ x+3 \geq x^2+1+2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq -1 \\ x^2+x-2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq -1 \\ -2 \leq x \leq 1 \end{cases}$



Risolviamo $x^2+x-2 \leq 0$

$$x^2+x-2=0$$

$$\Delta = 1+8 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \quad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Sol: $-2 \leq x \leq 1$

Sol. (I) $\quad -1 \leq x \leq 1$

$(II) \begin{cases} x \geq -3 \\ x<-1 \end{cases} \Rightarrow -3 \leq x < -1$

$S_{TOT} = S_{(I)} \cup S_{(II)}$: $-3 \leq x < -1 \vee -1 \leq x \leq 1 \iff \boxed{-3 \leq x \leq 1}$