EQUAZIONI CON VALORE ASSOLUTO.

Cominciamo questo argomento esponendo la definizione di valore assoluto di un numero reale.

Sia quindi x un numero reale; il valore assoluto di x che indicheremo con $|x|$ è per definizione

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Quindi ad esempio:

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{se } x \geq 4 \\ -x+4 & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

Come si risolve una equazione con valore assoluto?

ESEMPIO:

$|2x-3| = x+6.$

Si ha

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{se } 2x-3 \geq 0 \\ -2x+3 & \text{se } 2x-3 < 0 \end{cases}$$

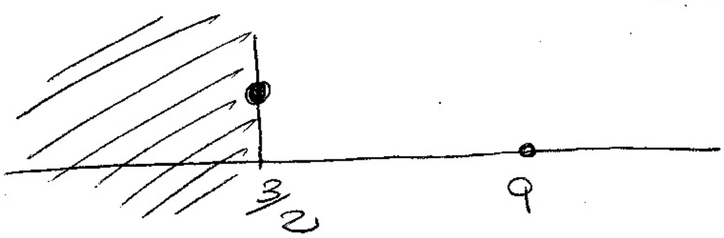
ovvero:

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{se} \quad x \geq \frac{3}{2} \\ -2x+3 & \text{se} \quad x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

Nello studio dell'equazione proposta, distinguiamo due casi:

se $x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow$

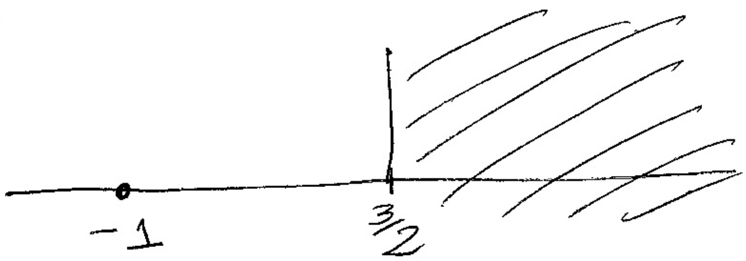
$$2x - 3 = x + 6$$
$$2x - x = 6 + 3$$
$$\boxed{x = 9}$$



La soluzione trovata è sicuramente accettabile

se $x < \frac{3}{2} \Rightarrow$

$$-2x + 3 = x + 6$$
$$-2x - x = 6 - 3$$
$$\boxed{x = -1}$$



Anche in questo caso la soluzione è accettabile.

In conclusione, tutte e sole le soluzioni dell'equazione proposta si ottengono dall'unione delle soluzioni ottenute nei due casi. Quindi le soluzioni dell'equazione sono $x = -1$, $x = 9$.

In maniera equivalente, si poteva scrivere:

$$\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ 2x-3 = x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x = 9 \end{cases} \quad \text{ok}$$

$$\begin{cases} 2x-3 < 0 \\ -2x+3 = x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x = -1 \end{cases} \quad \text{ok}$$

ottenendo infatti che entrambe le soluzioni sono accettabili.

Consideriamo adesso le:

DISEQUAZIONI CON VALORE ASSOLUTO

<u>ESEMPIO</u>:

$|x^2-5| < 4$.

Sappiamo che $|x^2-5| = \begin{cases} x^2-5 & \text{se } x^2-5 \geq 0 \\ -x^2+5 & \text{se } x^2-5 < 0 \end{cases}$

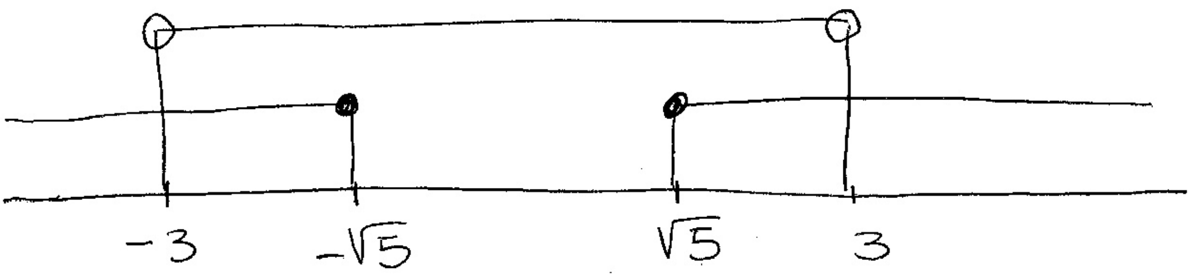
ovvero

$$|x^2-5| = \begin{cases} x^2-5 & \text{se } x \leq -\sqrt{5} \lor x \geq \sqrt{5} \\ -x^2+5 & \text{se } -\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \end{cases}$$

Si ha quindi:

$$\text{I}\quad \begin{cases} x^2 - 5 \geq 0 \\ x^2 - 5 < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -\sqrt{5}\ ,\ x \geq \sqrt{5} \\ x^2 - 9 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -\sqrt{5}\ ,\quad x \geq \sqrt{5} \\ -3 < x < 3 \end{cases}$$

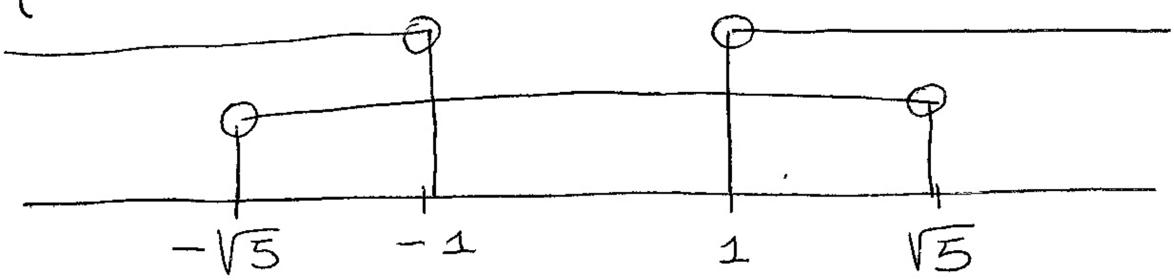


$$-3 < x \leq -\sqrt{5} \quad \vee \quad \sqrt{5} \leq x < 3$$

Non abbiamo ancora completato lo studio!

$$\text{II}\quad \begin{cases} x^2 - 5 < 0 \\ -x^2 + 5 < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \\ x < -1 \quad \vee \quad x > 1 \end{cases}$$



$$-\sqrt{5} < x < -1 \quad \vee \quad 1 < x < \sqrt{5}$$

In conclusione, le soluzioni della disequazione assegnata si ottengono facendo l'unione delle soluzioni ottenute dai due sistemi:

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \; : \; -3 < x < -1 \;\vee\; 1 < x < 3 \}$$

EQUAZIONI IRRAZIONALI

ESEMPIO:

$$\sqrt{3x+4} = x$$

Eleviamo al quadrato ambo i membri dell'equazione

$$\left(\sqrt{3x+4}\right)^2 = (x)^2 \Rightarrow 3x+4 = x^2$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado ottenuta:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \quad , \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} -1 \\ 4 \end{cases}$$

$$x_1 = -1 \quad \vee \quad x_2 = 4.$$

Verifichiamo adesso se le soluzioni ottenute sono accettabili, sostituendo nella equazione di partenza

$$\sqrt{3\cdot(-1)+4} \overset{?}{=} -1 \Rightarrow \sqrt{1} \overset{?}{=} -1 \Rightarrow 1 \overset{?}{=} -1$$

NO, quindi $x = -1$ non è soluzione.

$$\sqrt{3 \cdot \mathbf{4} + 4} \overset{?}{=} \mathbf{4} \Rightarrow \sqrt{16} \overset{?}{=} 4 \Rightarrow 4 \overset{?}{=} 4$$

Sì, quindi $x = 4$ è soluzione.

In conclusione: $x = 4$ è l'unica soluzione dell'equazione irrazionale.

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Per iniziare, studiamo la seguente disequazione $\sqrt{A(x)} < B(x)$.

La disequazione proposta è equivalente al sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < B^2(x) \end{cases}$$

dove, vale la pena specificare, la prima disequazione esprime la condizione di esistenza della radice quadrata, la seconda disequazione esprime la positività del termine a destra, la terza disequazione è quella che si ottiene elevando ambo i membri della disequazione assegnata al quadrato.

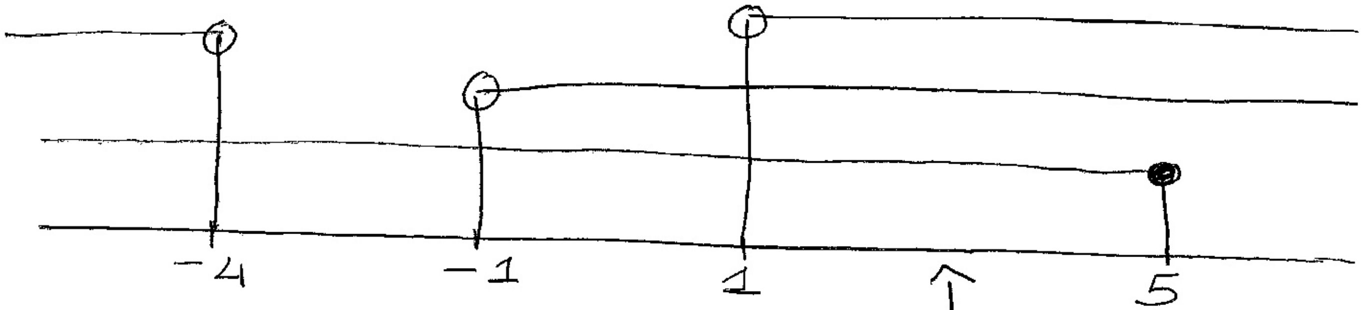
Facciamo un esempio:

$$\sqrt{5-x} < x+1$$

secondo quanto visto, la disequazione irrazionale proposta è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 5-x \geq 0 \\ x+1 > 0 \\ 5-x < (x+1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x > -1 \\ 5-x < x^2+1+2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ x > -1 \\ x^2+3x-4 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 5 \\ x > -1 \\ x < -4 \vee x > 1 \end{cases}$$



$$S = \{ x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 5 \}$$

Consideriamo adesso la seguente disequazione irrazionale:

$$\sqrt{A(x)} > B(x)$$

le cui soluzioni si ottengono dalla unione delle soluzioni ~~che si~~ dei due sistemi

$$\begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > B^2(x) \end{cases}$$

quando il termine a destra è negativo e la radice esiste, la disuguaglianza risulta automaticamente verificata.

in questo caso la condizione $A(x) \geq 0$ è implicitamente soddisfatta dall'ultima e può essere tralasciata.

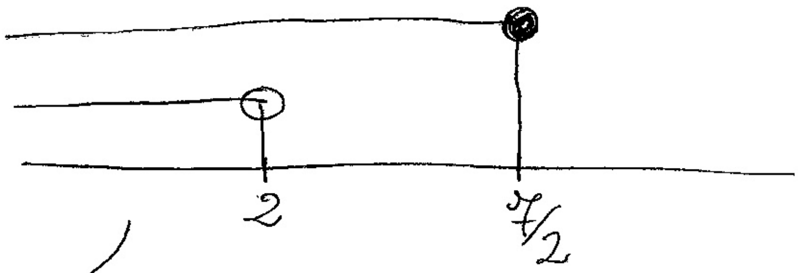
ESEMPIO

$$\sqrt{7-2x} > x-2 .$$

Impostiamo i due sistemi:

$$\underset{\text{I}}{\begin{cases} x-2 < 0 \\ 7-2x \geq 0 \end{cases}} \cup \underset{\text{II}}{\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 7-2x > (x-2)^2 \end{cases}}$$

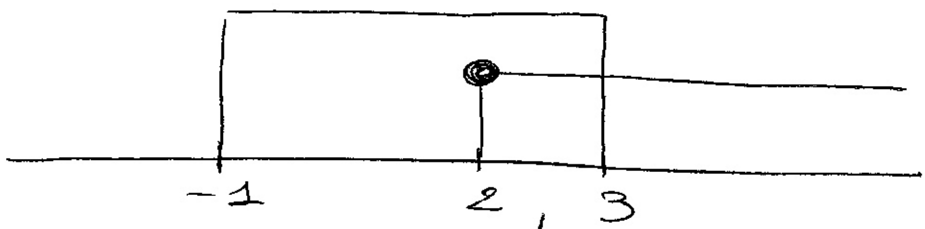
(I) $\begin{cases} x-2<0 \\ 7-2x \geq 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x<2 \\ x \leq \dfrac{7}{2} \end{cases}$



Quindi le due disequazioni sono verificate contemporaneamente per $\boxed{x<2}$.

(II) $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 7-2x > (x-2)^2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \geq 2 \\ 7-2x > x^2+4-4x \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-2x-3<0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \geq 2 \\ -1<x<3 \end{cases}$



$\boxed{2 \leq x < 3}$.

Unendo le soluzioni ottenute dai due sistemi, otteniamo che la disequazione irrazionale ha come soluzioni

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x<3\}$$

MATEMATICA

1. La seguente equazione
$$\sqrt{3x+4} = x$$
è verificata per
   (a) $x = -1$
   (b) $x = 4$
   (c) $x = -1$, $x = 4$
   (d) Nessuna delle precedenti affermazioni è quella corretta

2. La seguente equazione
$$\sqrt{-x+3} = -x+1$$
è verificata per
   (a) $x = 1$
   (b) $x = 0$
   (c) $x = -1$
   (d) Nessuna delle precedenti affermazioni è quella corretta

3. La disequazione
$$\frac{1}{4}(x+2) - (1+x)^2 < \frac{(1-x)(1+x)}{2} - 1$$
è verificata per
   (a) $x < 1$
   (b) $x < -\frac{7}{2}$, $x > 0$
   (c) $x > 0$
   (d) Nessuna delle precedenti affermazioni è quella corretta

4. La disequazione
$$\frac{5x}{4-x^2} > 0$$
è verificata per
   (a) $x < -2$, $0 < x < 2$
   (b) $x > 0$
   (c) $x > \dfrac{1}{5}$
   (d) Nessuna delle precedenti affermazioni è quella corretta

5. La disequazione
$$\frac{3}{x} + \frac{x-1}{x+1} < \frac{1}{4}$$
è verificata per
   (a) $x < -4$
   (b) $x < -1$, $x > 0$
   (c) $-1 < x < 0$

(d) Nessuna delle precedenti affermazioni è quella corretta

6. La disequazione
$$|2x - 1| > 3$$
è verificata per
   (a) $x < -1$, $x > 2$
   (b) $x > 1$
   (c) $x < 3$
   (d) Nessuna delle precedenti affermazioni è quella corretta

7. La disequazione
$$|x^2 - 2| - x < 0$$
è verificata per
   (a) $x < 1$, $x > 2$
   (b) $1 < x < 2$
   (c) $x < -\sqrt{2}$
   (d) Nessuna delle precedenti affermazioni è quella corretta

8. La seguente disequazione
$$\sqrt{5 - x} < x + 1$$
è verificata per
   (a) $x < 1$, $x > 5$
   (b) $x \geq 1$
   (c) $1 < x \leq 5$
   (d) Nessuna delle precedenti affermazioni è quella corretta

9. La disequazione
$$\sqrt{x^2 - 1} < x + 3$$
è verificata per
   (a) $x < 1$, $x > 3$
   (b) $-5/3 < x \leq -1$, $x \geq 1$
   (c) $3 < x < 15$
   (d) Nessuna delle precedenti affermazioni è quella corretta

10. La seguente disequazione
$$\sqrt{-2x + 7} + 2 > x$$
è verificata per
   (a) $x < 3$
   (b) $2 \leq x < 3$
   (c) $x < 2$
   (d) Nessuna delle precedenti affermazioni è quella corretta